Examen de Análisis de Variable Compleja
Cuarto curso de Matemáticas (Fundamental)
24 de junio de 2000

1. *a*) Sea f una función entera tal $f(z) = f(f(z))$ para todo $z\in\mathbb{C}$. ¿Qué puede afirmarse de f?

   b) ¿Puede existir una función $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ verificando que $|f(z)| \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{|z|}}$ para todo $z\in\mathbb{C}^*$?

2. Construir un isomorfismo conforme del dominio

$$\Omega = \{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0,\ -\pi/2 < \mathrm{Im}(z) < \pi/2\}$$

   sobre el disco unidad $D(0,1)$

3. Integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera del conjunto

$$\{z\in\mathbb{C} : \varepsilon < |z| < R,\ 0 < \arg(z) < 2\pi/3\},\quad (0 < \varepsilon < 1 < R)$$

   calcular las integrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{3/2}\log(x)}{1+x^3}\,dx,\quad \int_0^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^3}\,dx.$$

4. Determinar el número de ceros del polinomio $P(z) = z^6 + 2z^3 + 6z + 9$.

   a) en el anillo $A(0;1,2)$;

   b) en el semiplano de la derecha.

5. Sea $\Omega = \{z\in\mathbb{C} : |z| > 1\}$, y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{\Omega}$, holomorfa en Ω y que tiene límite finito en infinito. Justifíquese que la función $|f|$ alcanza un máximo absoluto en un punto de la circunferencia unidad y que, si f no es constante, la función φ definida para todo $r > 1$ por

$$\varphi(r) = \text{máx}\{|f(z)| : |z| = r\}$$

   es estrictamente decreciente.